

# Propuesta para la enseñanza del cálculo utilizando las TICs como recurso didáctico en el curso MA-1210

Jendry Arguedas Flatts  
Marvin Coto Jiménez  
Javier Trejos Zelaya



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA



innova**CESAL**



Proyecto cofinanciado  
por la Unión Europea



Proyecto coordinado por  
la Universidad Veracruzana,  
México

2010

---



Proyecto cofinanciado  
por la Unión Europea



Universidad Veracruzana

Proyecto coordinado  
por la Universidad Veracruzana,  
México

«La presente publicación ha sido elaborada con la asistencia de la Unión Europea. El contenido de la misma es responsabilidad exclusiva de los autores y en ningún caso refleja los puntos de vista de la Unión Europea».



Esta obra está bajo la licencia de Reconocimiento-No comercial – Sin trabajos derivados 2.5 de Creative Commons. Puede copiarla, distribuirla y comunicarla públicamente, siempre que indique su autor y la cita bibliográfica; no la utilice para fines comerciales; y no haga con ella obra derivada.

# Propuesta para la enseñanza del cálculo utilizando las TICs como recurso didáctico en el curso MA-1210

Jendry Arguedas Flatts<sup>1</sup>  
Marvin Coto Jiménez<sup>2</sup>  
Javier Trejos Zelaya<sup>3</sup>

12 de septiembre de 2010

## Resumen

*El presente documento describe la experiencia docente realizada en dos grupos de la cátedra de MA-1210 Cálculo I para el área de la salud de la Universidad de Costa Rica. Primero se exponen las ideas principales que fundamentaron la propuesta didáctica para la enseñanza del tema de máximos y mínimos y del concepto de integral definida, utilizando Tecnologías de la Información y Comunicación como recurso para desarrollar competencias basadas en el modelo de pensamiento complejo. Los elementos tecnológicos utilizados son el software didáctico GeoGebra para el diseño de actividades que ilustraran ejemplos y teoremas, así como la plataforma educativa Moodle. Se utilizaron tres grupos, dos son experimentales en los cuales se desarrolló la propuesta didáctica, y uno de control en donde lo contenidos se desarrollaron de forma tradicional. Finalmente, se expone la metodología utilizada para la implementación y sus resultados.*

**Palabras clave:** uso de TICs, Geogebra, cálculo, moodle.

## 1. Contexto del abordaje pedagógico

### 1.1 Antecedentes y justificación

Existen distintos enfoques metodológicos con que se diseñan las propuestas didácticas para la enseñanza de la matemática, uno de los recursos mayormente utilizado son las tecnologías, en particular el software didáctico. Cada enfoque tiene el objetivo de ayudar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje y comprensión de los conceptos, de manera que incremente los porcentajes de aprobación.

---

<sup>1</sup> Académica de la Universidad Nacional y Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.

<sup>2</sup> Académico de la Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.

<sup>3</sup> Catedrático, Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.

Por ejemplo Hernández y Da Silva (2008) consideran que la tecnología es vista como una herramienta con gran potencial para la discusión y dominio pleno de los conceptos. En este sentido Dall'Anese (2006), citado por Hernández y Da Silva, afirma que:

“los estudios relacionados con el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, demuestran que la computadora es una herramienta que facilita la visualización del contenido abstracto aprendido en el aula. En este contexto, la tecnología se identifica como una herramienta promisorio para la discusión y el análisis de estos conceptos” (p. 2).

Así mismo, existen otros autores (Aquere, s.f, Camacho & González, 2005) que señalan las ventajas que produce el uso de las tecnologías en el aula y los cuidados que deben considerarse. Se cita por ejemplo, la preparación de una guía de trabajo para evitar distracciones en los estudiantes y el aprovechamiento del tiempo.

De acuerdo con Duval, para que el estudiante logre una mejor comprensión de los conceptos es importante la conversión y manipulación coherente de los conceptos entre distintos registros. El profesor debe promover en clase situaciones en donde se presente los conceptos en varios registros (el geométrico y luego el algebraico, por ejemplo). Hitt (2003), comparte esta opinión al afirmar que

“[...] las representaciones de un concepto matemático, solo representan una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción” (p. 213).

En este sentido, el software educativo tiene grandes ventajas, por ejemplo la posibilidad de la graficación de funciones o puntos, visualización, animación, manipulación de situaciones en la clase para ayudar a comprender ejercicios o problemas y entender conceptos.

En el caso de Costa Rica, la mayoría de las clases de los cursos de Cálculo I se desarrollan de manera tradicional, es decir, sin ningún apoyo tecnológico más que el uso de software para presentar las gráficas de funciones. Esta realidad se puso de manifiesto al consultar a los profesores de la cátedra de MA-1001 Cálculo I de la Universidad de Costa Rica sobre qué herramientas utilizan para el desarrollo de las clases, además del método explicativo tradicional utilizando la pizarra.

También se cuenta con el registro de resultados en el curso en todos los grupos, durante tres años anteriores a la realización de la experiencia. Estos resultados muestran que el porcentaje de aprobación general no supera el 50% en la mayoría de los semestres en que es aplicado, por lo que existe una necesidad de mejorar los procesos de aprendizaje para lograr mejores resultados de los estudiantes.

Con el propósito de mejorar el aprendizaje de ciertos conceptos de un curso de cálculo, se diseña la propuesta didáctica que además de proponer la enseñanza, propone un cambio en la evaluación. Como la propuesta se basa en la formación de competencias, la evaluación no puede ser como la que se aplica comúnmente en los cursos de cálculo (tres exámenes parciales) ya que ésta solo mide los resultados finales de forma cuantitativa, lo que dificulta valorar el desempeño que el estudiante va logrando en el proceso. Como indica Tobón (2005), al proceso de aprendizaje se le debe dar un seguimiento, indicar los errores, dar sugerencias durante el desarrollo del curso para observar un avance de la comprensión de conceptos y por tanto la adquisición de la competencia.

Este trabajo es el resultado de la tesis de Maestría de los profesores Marvin Coto y Jendry Arguedas bajo la dirección de Javier Trejos.

## 2. Descripción de la propuesta

Parte de la propuesta didáctica fue implementada en dos grupos del curso MA 1210 Cálculo I de la Universidad de Costa Rica, durante el I ciclo del 2010, con una población de estudiantes provenientes de carreras del área de la salud, tales como odontología, medicina y microbiología. Es un curso con 5 horas semanales de clase presencial, donde se estudian límites, derivadas e integrales de funciones en una variable real.

Generalmente, se trata del primer y único curso de matemáticas que reciben los estudiantes a nivel universitario si han ganado un examen de diagnóstico. De lo contrario, recibirán un curso propedéutico de precálculo (funciones polinomiales, exponencial y logarítmica) pues normalmente se presentan deficiencias en conocimientos básicos e indispensables para Cálculo.

Las clases fueron desarrolladas según las indicaciones expuestas en las *Sesiones presenciales*, las cuales se presentarán en la siguiente sección. Los aspectos que se evaluarán del curso solamente son los que abarca la propuesta didáctica (concepto y aplicaciones de la derivada e integral definida) y se hará por medio de los *Cuestionarios virtuales* disponibles en la plataforma Moodle. Sin embargo, la resolución de éstos no es obligatoria para los estudiantes, dado que la evaluación oficial del curso establece solo tres exámenes parciales (dos de 35% y uno de 30%) para todos los grupos.

La plataforma Moodle permite saber la cantidad de veces que cada estudiante ingresa a los recursos y los intentos que hizo en cada cuestionario. La solución de esos cuestionarios, así como la frecuencia con que se accede a los recursos, ayuda a controlar el nivel de comprensión de los conceptos y así dar recomendaciones y guías a los estudiantes para mejorar su nivel durante el desarrollo del curso.

Para la elaboración de ambos temas de la propuesta didáctica se realizaron dos etapas. La primera consistió en definir la competencia en el tema de los máximos y mínimos, y la de integral definida correspondiente a un curso de Cálculo I. La segunda etapa fue diseñar las guías de clase llamadas *Sesiones presenciales*, con las cuales se pretende exponer de forma diferente los conceptos teóricos.

Los contenidos que abarca este estudio y para los cuales se diseñó una competencia, son los siguientes:

### 1 Aplicaciones de la derivada.

Extremos en un intervalo. Máximos y mínimos de funciones en intervalos cerrados. Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la primera derivada. Derivadas de orden superior.

Concavidad y criterio de la segunda derivada. Puntos de inflexión. Asíntotas. Trazado de curvas. Problemas de optimización.

### 2. La integral

Funciones primitivas e integración indefinida. Interpretación geométrica de la integral indefinida. Integración por sustitución. La integral definida como el área bajo una curva. Propiedades. Teorema fundamental del cálculo. Área de una región entre dos curvas.

## 2.1 Participantes

Se trabajó con dos tipos de grupos de la misma cátedra, dos grupos experimentales y un grupo control. El primero es el grupo en donde se implementó la propuesta didáctica y el segundo es el que recibió los mismos contenidos pero sin el apoyo tecnológico ni la propuesta didáctica diseñada.

La cantidad de estudiantes matriculados en cada grupo y los que finalizaron el curso se detalla en el cuadro 5.1.

Estudiantes	Grupo experimental 1	Grupo experimental 2	Grupo control
Matriculados	30	35	
Finalizaron el curso	10	15	

*Cuadro 1 : Cantidad de estudiantes matriculados y que finalizaron el curso*

De acuerdo con el criterio de los profesores, se identificaron los conocimientos de secundaria en donde más comúnmente se presentaban deficiencias.

1. Factorización.
2. Solución de ecuaciones e inecuaciones.
3. Graficación de funciones.
4. Propiedades de los logaritmos.
5. Aplicación de fórmulas notables.
6. Solución de sistemas de ecuaciones.
7. Leyes de potencia para simplificación de expresiones.
8. Interpretación gráfica de los ceros de una función.
9. Cálculo de imágenes y preimágenes dada la gráfica de una función.

## **2.2 Propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de los máximos y mínimos**

### **I Etapa.**

La competencia definida es “Comprende y utiliza el concepto de máximo o mínimo relativo para la solución de problemas utilizando los conceptos de cálculo diferencial”. Para ésta se definieron tres criterios de desempeño y a su vez cada uno tiene tres niveles de logro que se exponen a continuación.

1. Maneja el concepto de derivada.
  - a. Define la derivada usando el límite.
  - b. Define la derivada usando el límite y como pendiente de la recta tangente.
  - c. Utiliza el concepto de derivada, como pendiente de la recta tangente, para resolver problemas.
2. Utiliza los teoremas y definiciones estudiadas en clase.
  - a. Identifica intervalos de crecimiento y concavidad en la gráfica.
  - b. Relaciona los intervalos de crecimiento y concavidad con las derivadas de la función.
  - c. Identifica, utiliza y resuelve con criterios (criterio de la primer y segunda derivada) en los problemas.
3. Determina los máximos y mínimos de una función.
  - a. Identifica máximos y mínimos a partir de la gráfica.
  - b. Relaciona el concepto de máximos y mínimos con la derivada.
  - c. Utiliza criterios para determinar máximos y mínimos correctamente.

Estos se utilizaron para evaluación de la competencia y por tanto se retoman en la sección de análisis de resultados ubicada en la página 18. Así mismo, estos criterios guían las preguntas de los cuestionarios que se explicarán en la página 7. Además, se definieron los saberes esenciales y las evidencias requeridas. El rango de aplicación se estableció como un curso introductorio de cálculo.

## II Etapa.

Esta etapa consiste en describir las *Sesiones presenciales*. Estas exponen todo el desarrollo teórico (teoremas, definiciones, etc), ejemplos y las intervenciones tecnológicas (actividades interactivas desarrolladas en el software educativo GeoGebra) para explicar algunos conceptos y ejemplos, lo cual corresponde al aporte de la propuesta didáctica para la enseñanza de Cálculo. Estos documentos se dividieron en cuatro. El primero desarrolla el concepto de derivada y el último abarca las aplicaciones de los máximos y mínimos en los problemas de optimización. En este reporte solo se presentará la descripción de la *Clase 1* y *Clase 3* con el objetivo de representar el trabajo que contiene este elemento de la propuesta.

Como la propuesta tenía como base teórica las competencias bajo el modelo de pensamiento complejo, utilizando las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs), los recursos tecnológicos que se utilizaron fueron las hojas dinámicas realizadas con el software educativo GeoGebra y el uso de la plataforma Moodle. Cada una de ellas se detalla en las *Sesiones presenciales*.

### Sesiones presenciales

#### Clase 1

En esta clase se pretende lograr los niveles de logro del primer criterio de desempeño (Maneja adecuadamente el concepto de derivada). La implementación tecnológica de esta clase se basa en crear animaciones en GeoGebra que ilustren el proceso por el cual se llega a la definición de derivada, de manera que facilite la comprensión de este concepto y sea de forma más significativa para el estudiante.

La primera actividad tiene como objetivo estudiar el concepto de derivada e introducirlo como una herramienta para determinar máximos y/o mínimos de una función. Primero se realiza una breve motivación de las aplicaciones de la derivada, en particular la optimización, presentando el siguiente problema.

Los puntos *A* y *B* están situados uno frente al otro y en lados opuestos de un río recto de 300 metros de ancho. El punto *D* está a 600 metros de *B* y en su misma orilla. Una compañía de teléfonos desea tender un cable desde *A* hasta *D*. Si el costo por metro de cable por tierra es de 16 y por agua es el 25% más caro que por tierra. ¿Cómo se debe tender el cable, para que el costo total sea mínimo?

Para ilustrar la situación del problema se usa una actividad interactiva de GeoGebra en la que el estudiante puede mover el punto *C* horizontalmente (para cambiar la posición de *C* se debe usar el deslizador *b*, lado derecho de la imagen) y así observar las posibles soluciones del problema. La figura 1 muestra una imagen de esta actividad.

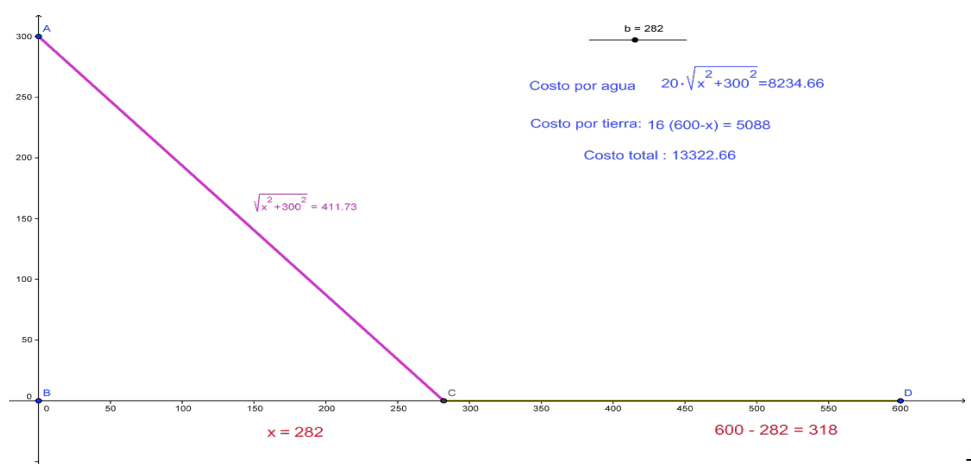


Figura 1: ilustración del problema

Después de comentar que para resolver el problema necesitamos conocer la posición del punto C en la tierra para gastar menos dinero en la construcción del cable, es decir, encontrar el valor mínimo de la función costo, se definen conceptos como máximo y mínimo relativo, absoluto, puntos extremos, etc. Se hace uso de gráficas para su explicación.

Después de que la discusión anterior nos lleva a la conclusión de que el conocer la derivada, o bien, la pendiente de la recta tangente en un punto, nos dará la herramienta para determinar los extremos de una función, se presenta una animación de GeoGebra. La figura 2 muestra una imagen de esta animación. Para cambiar la posición de las rectas, con el mouse se mueve horizontalmente a lo largo del eje x el valor de  $x_0+h$ .

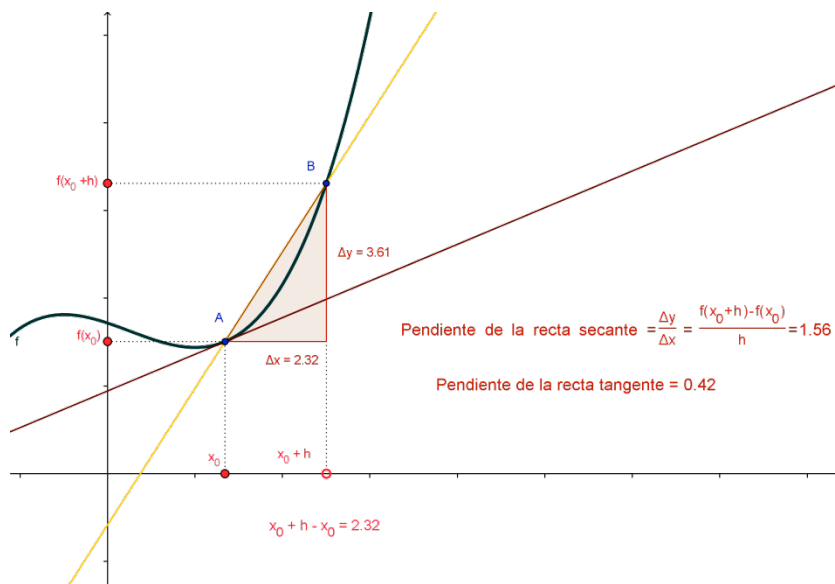


Figura 2: Actividad que ilustra el concepto de derivada.

En el resto de la clase se estudian las reglas básicas para encontrar la función derivada.

### Clase 3

El uso del software en esta clase es con el propósito de que el estudiante previamente visualice el resultado que nos expone el criterio de la primera derivada y el de la segunda derivada, antes de ser expuesto formalmente como teorema. En esta guía se especifica con detalle en que parte y la forma en que se usará.

Se estima que esta clase se puede abordar en dos hora y treinta minutos, y se pretende desarrollar los niveles de logro del criterio dos (Utiliza los teoremas y las definiciones estudiadas en clase) y tres (Determina los máximos y mínimos de una función).

Se usa una actividad interactiva del GeoGebra con el objetivo de mover el punto A en la curva para observar el comportamiento de la recta tangente y el signo de su pendiente en distintos puntos de la curva. Posteriormente se realizan los siguientes planteamientos a los estudiantes y se les pide que contesten las preguntas en sus cuadernos.



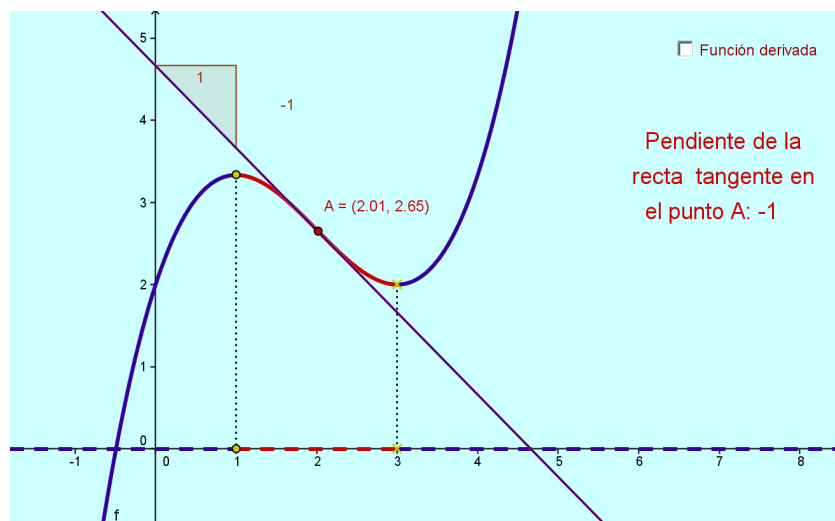


Figura 3: ilustración de la primera actividad utilizada en la clase 3

1. ¿Cuáles son los extremos relativos?
2. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en uno de los extremos relativos?
3. ¿Cuál es el valor de  $f'(2.3)$ ,  $f'(3.6)$  y  $f'(-0.33)$ ?
4. ¿Cuál es la relación entre el signo de  $f'$  y los intervalos donde la función es creciente o decreciente?

## 2.3 Propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de integral definida

### I Etapa

La propuesta consiste en una estrategia para el desarrollo de una competencia específica en matemática, relacionado con el cálculo integral en enseñanza universitaria. Para ésta, se definió en primer lugar la cartografía de la competencia, cuyo nombre es: "Comprender y utilizar la integral definida en la solución de ejercicios de cálculo y aplicaciones relacionados con funciones reales de una variable, continuas en un intervalo cerrado". Contiene tres criterios de desempeño:

1. Comprende y utiliza de forma correcta el concepto de integral definida en la solución de ejercicios.
  - a) Resuelve ejercicios sin considerar la interpretación gráfica.
  - b) Realiza construcciones gráficas con información de integrales.
  - c) Resuelve adecuadamente ejercicios de integral definida considerando su interpretación.
2. Comprende y aplica los teoremas y propiedades básicos de la integral definida en la solución de ejercicios.
  - a) Plantea la solución de ejercicios relacionados con integral definida.
  - b) Comprende e ilustra resultados y teoremas principales.
  - c) Comprende y utiliza teoremas y resultados en la solución de ejercicios.
3. Resuelve aplicaciones con integral definida utilizando procedimientos pertinentes.
  - a) Identifica la aplicación de integral definida en problemas de aplicación.
  - b) Plantea la solución adecuada a problemas.
  - c) Utiliza el concepto para resolver adecuadamente problemas de aplicación.

Con éstos se definieron los saberes esenciales y los niveles de logro para cada criterio de desempeño. El rango de aplicación fue un curso de servicio de cálculo diferencial e integral de la Universidad de Costa Rica.

## II Etapa

Igualmente, las sesiones presenciales consisten en actividades propuestas para el desarrollo de diversos contenidos durante las clases regulares del curso. Son cuatro sesiones que desarrollan los contenidos de definición y teoremas principales de la integral definida, integral de funciones exponenciales, cálculo de área entre curvas y cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Cada una de las sesiones contiene una motivación a partir del problema histórico que los desarrollos teóricos por desarrollar han permitido resolver, una actividad por desarrollar por parte de los estudiantes para mostrar la necesidad de la teoría en contextos de aplicación y la exposición de ésta apoyada con recursos TIC diseñados específicamente para la propuesta, todos con programas libres y de código abierto.

A continuación se describirán dos de estas sesiones:

### Sesiones presenciales:

Clase 1: Definición y teoremas principales de la integral definida.

Se parte del problema histórico de determinar áreas de figuras relacionadas con curvas, y se introduce, con ayuda de videos y animaciones en GeoGebra, el tema del método griego de exhaustión, en el que un área es aproximada mediante otras conocidas (rectángulos, triángulos, entre otros). Asimismo, presentar que a partir del área del triángulo se obtienen las de otros polígonos, tales como octágonos y hexágonos.

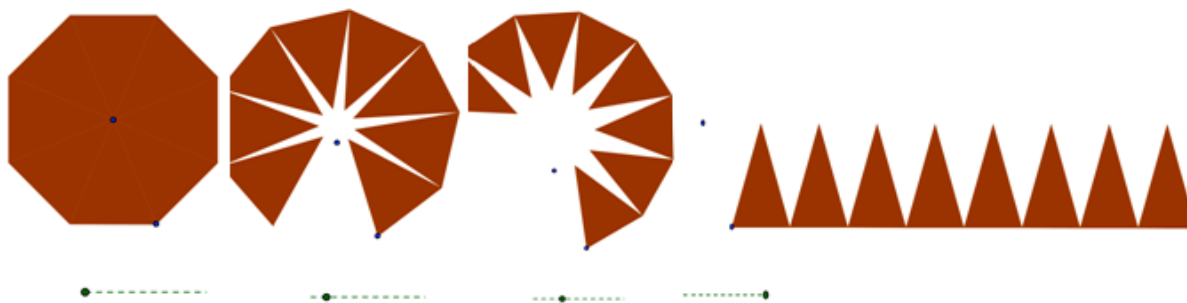


Figura 4: Imagen de la hoja dinámica que ilustra el área del octógono.

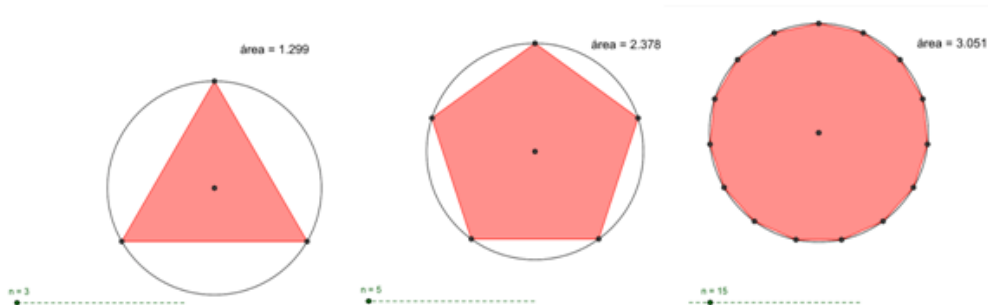


Figura 5: Imagen de la hoja dinámica que ilustra el método de exhaustión.

Después de esto, se presenta el problema de determinar un área de una obra arquitectónica que contiene un ventanal de forma de parábola invertida, en el que se requiere estimar la cantidad de material necesario para su construcción. Se da a los estudiantes un esquema de la figura (figura 6) y se les pide aproximar este dato.

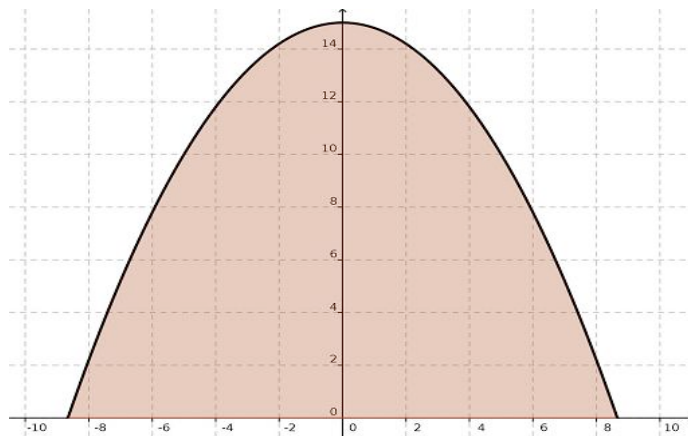


Figura 6: Esquema de parábola invertida para aproximar área.

Posteriormente se analizan las respuestas de los estudiantes y se introduce el tema de la integral definida como el límite de una aproximación de área bajo una curva con rectángulos. La figura 7 muestra una secuencia de imágenes que sigue la animación que existe para ilustrar este concepto.



Figura 7: Secuencia de imágenes de la animación para el concepto de sumas inferiores integral.

A ésta siguen los teoremas principales, para los cuales se cuenta también con hojas dinámicas de GeoGebra que permiten verificar los resultados, como el teorema fundamental del cálculo (figura 8).

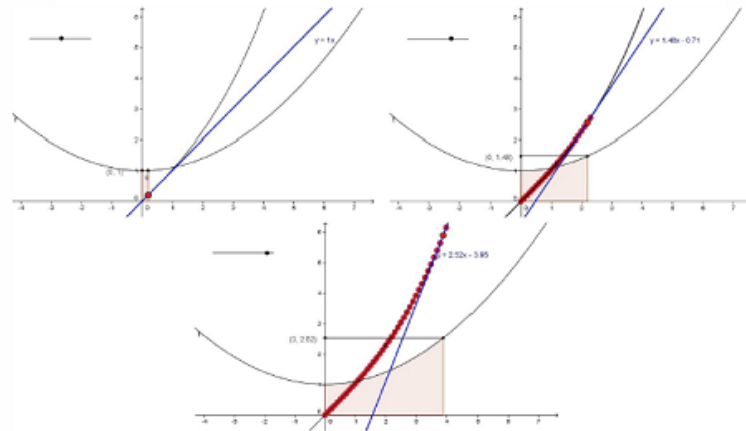


Figura 8: Muestra del teorema fundamental del cálculo con GeoGebra.

La sesión finaliza con ejemplos, ligados siempre a su representación geométrica, y a una serie de ejercicios propuestos.

#### Clase 4: Sólidos de revolución

Se inicia con la presentación de la dificultad de determinar volúmenes de cuerpos relacionados formas curvas (se presentan algunos, como una vasija, una dona), y se plantea la posibilidad de extender los resultados de la integral definida a éstos. Para la presentación del tema, posterior a la exposición de los teoremas principales, se construyeron videos con la herramienta Google Sketchup<sup>4</sup> con algunas figuras típicas, tales como la intersección entre dos cilindros, el toroide, y la región producida al girar área comprendida entre dos curvas, como  $y = x^3$  y  $y = x^2$ . Los videos duran aproximadamente 20 segundos cada uno, muestran la figura desde diferentes ángulos y cuentan con vistas de corte de los sólidos, lo que permite aplicar y visualizar mejor los resultados, como se muestra en la figura 9.

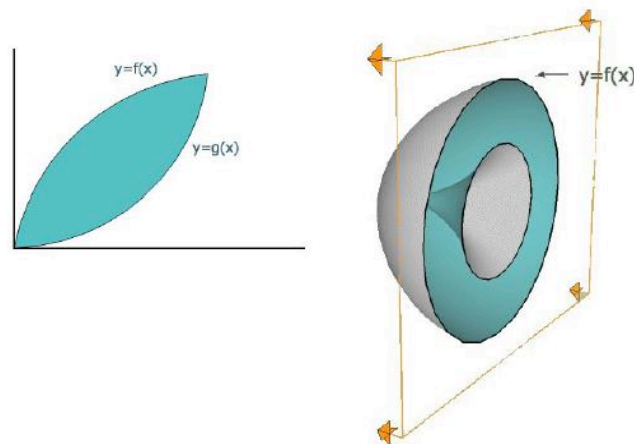


Figura 9: Área entre curvas y sólido de revolución obtenido al girar la región en torno al eje x.

<sup>4</sup>[Http://www.sketchup.google.com](http://www.sketchup.google.com)

### 3. Seguimiento y evaluación de la propuesta

#### 3.1 Instrumento inicial

En la segunda semana de clases se aplicó un cuestionario llamado “prueba diagnóstico” (ver anexo) que contenía dos partes. La primera tenía el propósito de conocer los conocimientos previos que los estudiantes iniciaban un curso de cálculo I, se evaluaban contenidos como factorización, ecuaciones, inecuaciones, etc. La segunda parte preguntaba sobre la frecuencia y facilidades para el uso de Internet, puesto que se requería que los estudiantes lo utilizaran para solucionar los cuestionarios virtuales y acceder a los otros recursos disponibles en la página web.

#### 3.2 Exámenes de cátedra

Se utilizaron los exámenes oficiales del curso para medir el desempeño del estudiante en los temas que involucra este trabajo. Se comparó el resultado en esas preguntas y lo obtenido en la resolución de los cuestionarios virtuales. Sin embargo, las preguntas de los exámenes son de carácter memorístico y se pueden resolver sin necesidad de tener claros los conceptos, por lo que no todas eran de utilidad para la investigación.

#### 3.3 Aplicaciones y recursos virtuales en Moodle

La propuesta contempla la utilización de la plataforma Moodle como medio de poner a disposición de los estudiantes durante horas extra clase las aplicaciones utilizadas en las sesiones presenciales, utilizar medios de comunicación como chat y foros, proponer ejercicios, pruebas en línea y material adicional como ejemplos, videos, aplicaciones y comentarios relacionados con la materia.

Para un mejor aprovechamiento y seguimiento de estos, es ideal la utilización de cuentas individuales por estudiante, pues la plataforma registra el acceso y las acciones realizadas por cada usuario (ver figura 10). Uno de los recursos para obtener información sobre la comprensión de los conceptos de los estudiantes, están los cuestionarios virtuales los cuales consisten en una serie de preguntas que se resuelven usando una *hoja dinámica* de GeoGebra. En este reporte solo se describirán los cuestionarios 3, 5 y 8 como ejemplo.

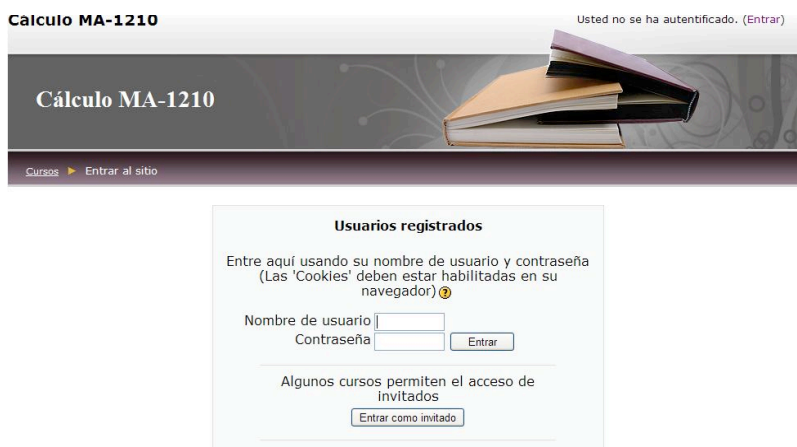


Figura 10: Página principal de Moodle

## Cuestionarios

### Cuestionario # 3

El objetivo del cuestionario 3 (ver figura 11) es estudiar la relación entre el valor numérico de la función derivada en un punto con respecto al valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese mismo punto.

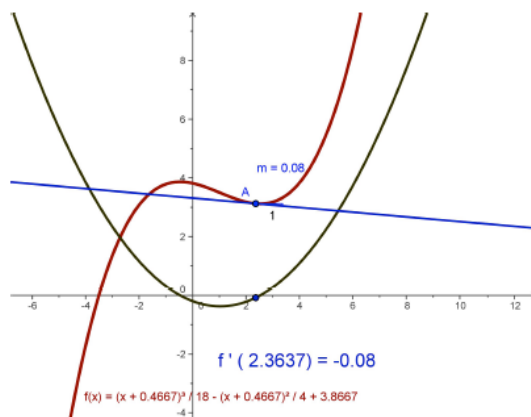


Figura 11: Ilustración del Cuestionario #3.

Para lograr este estudio se plantean las siguientes indicaciones y preguntas:

- Mueva el punto A hasta que m obtenga un valor de 2.5 aproximadamente.
- ¿Qué representa el valor de m con respecto a la gráfica?
- En esa posición, ¿cuál es el valor de  $f'$ ? ¿qué representa el valor numérico de  $f'$ ?
- Mueva el punto A de tal forma que la recta tangente quede paralela al eje x.
- ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente?
- ¿Qué valor toma  $f'(x)$  cuando la recta tangente es paralela al eje x?
- ¿Cómo se llama el punto en donde  $f'(x)$  es igual a cero?
- ¿Cómo se llama el punto en donde la recta tangente queda paralela al eje x?

### Cuestionario #5

Este es para complementar y repasar el criterio de la primer derivada que se usa para encontrar máximos y mínimos de funciones no necesariamente definidas en intervalos compactos. Se siguen las siguientes indicaciones y se usa la animación del cuestionario 3 (ver figura 12).

Mueva el punto A sobre la curva, la curva que se dibuja con el punto B es  $f'$ . Con esta información encuentre:

- Los puntos de la gráfica que cumplen  $f'(x) = 0$ ? Indique cómo llego a la respuesta.
- El valor de  $f(4)$ .
- El valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto  $(-2; f(-2))$ . Justifique su respuesta.
- Los intervalos en donde se tiene una recta tangente creciente. Justifique la respuesta.
- El intervalo o los intervalos en donde la función derivada es negativa.
- Los puntos críticos de la función  $f$ . De estos puntos, cuáles son máximos o mínimos relativos.

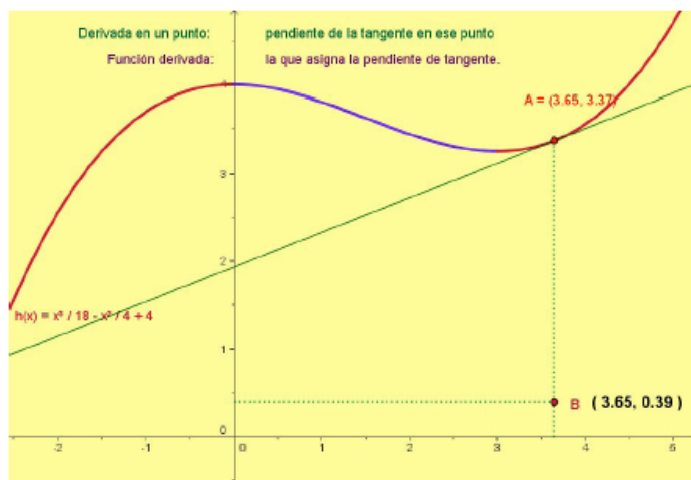


Figura 12: Ilustración del Cuestionario #5.

### Cuestionario #8

En la actividad de GeoGebra para el cuestionario 8 se muestran la gráfica de  $f(x)$  (trazo morado),  $f'(x)$  (trazo azul) y  $f''(x)$  (trazo verde), las puntos críticos y los puntos de inflexión. Puede cambiar el valor de los coeficientes del polinomio  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  y por tanto el criterio de la función  $f$ . Siga las siguientes instrucciones:

Cambie los valores de a; b; c y d, hasta obtener  $f(x) = x^3 + 3$ ;  $f(x) = 3x^2 - x + 1$ ;  $f(x) = 2$ . Con base en la información de la gráfica, determine.

- Los puntos críticos.
- El punto de inflexión.
- Los máximos y mínimos de  $f$ .

Justifique cada conclusión.

- ¿Qué relación existe entre los puntos A y C con los B y D?
- ¿Qué relación existe entre los puntos F y G?
- Cambie los valores de a; b c y d hasta obtener la gráfica de  $f(x) = x^3 - 1$ .

Conteste las preguntas anteriores con base en esta gráfica y realice lo mismo para  $f(x) = x^2 + 4x$ . ¿Cuáles puntos desaparecen y por qué? Encuentre los puntos críticos y puntos de inflexión.

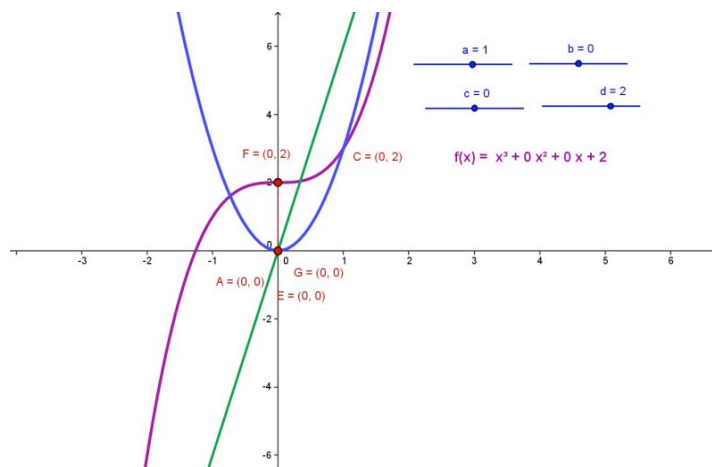


Figura 13: Ilustración del Cuestionario #8.

## Videos y complementos

En la figura 14 se muestra un ejemplo de recursos contenido en la página: videos sobre la método griego de exhaustión, y animaciones interactivas, como las utilizadas en la sesión presencial 1.

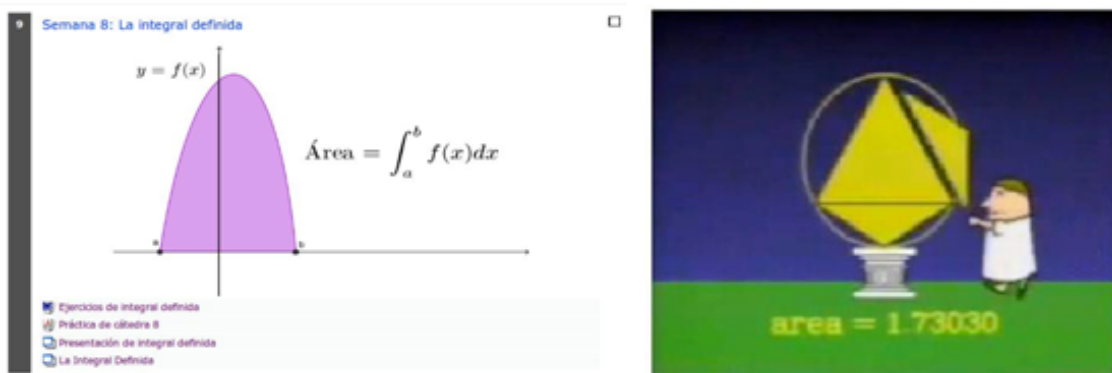


Figura 14: Recursos contenidos en la plataforma Moodle.

### Actividad de aproximación de área por el método de exhaustión

Se usa una hoja dinámica de GeoGebra (ver figura 12) en donde se puede cambiar la cantidad de lados del polígono inscrito en la circunferencia mediante un deslizador. Para que el estudiante conozca el propósito de esta actividad y la comprenda de mejor manera, se presentan preguntas como las siguientes:

1. Mueva el valor de  $n$  y observe el área del polígono inscrito.
2. ¿Qué sucede con la aproximación del área del círculo al aumentar el número de lados del polígono de aproximación?
3. Deduzca una forma para determinar el área de una circunferencia.

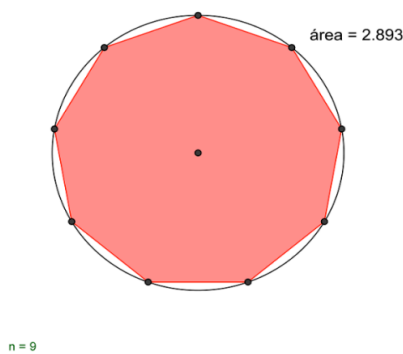


Figura 15: Ilustración de la animación del método de exhaustión.



## Actividad de integral de Riemann con sumas superiores e inferiores

Este recurso se trata de incluir unas preguntas que se responden manipulando la hoja dinámica que ilustra la definición de sumas inferiores de Riemann (ver figura 13). El objetivo es repasar lo visto en clase pero de manera que el estudiante participe, reflexione y analice el concepto. Como guía se presentan los siguientes planteamientos.

1. Al aumentar el número de rectángulos (hacer más fina la partición del intervalo), ¿qué sucede con el valor de la suma superior con respecto al valor del área bajo la curva?
2. Al aumentar el número de rectángulos (hacer más fina la partición del intervalo), ¿qué sucede con el valor de la suma inferior con respecto al valor del área bajo la curva?
3. Utilice el concepto de límite para inferir una fórmula que encuentre el área bajo la curva.

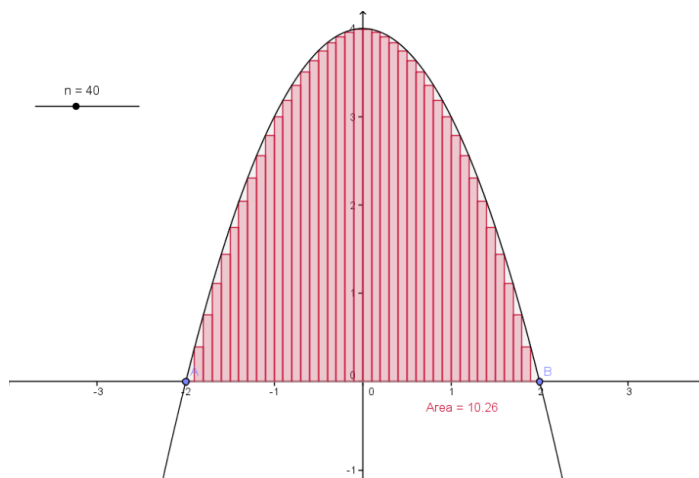


Figura 16: Ilustración de la animación de las sumas de Riemann.

## 4. Análisis y valoración de los resultados

### 4.1 Propuesta didáctica

La incorporación de las estrategias de enseñanza con el apoyo de las TIC tuvo un balance positivo, de acuerdo con la valoración de los profesores que aplicaron las estrategias, y de parte de los estudiantes, de acuerdo con las observaciones realizadas en clase y anotadas en las bitácoras. Si bien la implementación de la estrategia no fue completa, los elementos incorporados fueron una novedad para los estudiantes y los docentes participantes, quienes no contaban con experiencia previa en este tipo de actividades.

Los docentes realizaron observaciones con respecto a la mayor atención y motivación por parte de los estudiantes en las clases, ante el desarrollo de las mismas con elementos novedosos como las animaciones y videos utilizados en las presentaciones. Esto motivó una mayor participación, y de acuerdo con la observación de los profesores y las mediciones realizadas, un mayor nivel de comprensión.

### 4.2 Recursos tecnológicos

En la incorporación del proyector multimedia y computador se tuvieron dificultades que conviene prever en futuras experiencias, como el tiempo de instalación de los mismos, la disponibilidad de extensiones eléctricas, ubicación de la pantalla, instalación del software necesario y ajustes para la presentación de

material. Si las aulas donde se pueda integrar este tipo de experiencias no cuentan con el equipo instalado y calibrado, se puede pensar incluso en incorporar personas que asistan al profesor y estén al tanto de las características del equipo electrónico con que se cuenta.

En cuanto al uso de la plataforma Moodle, los resultados de poca participación por parte de los estudiantes parecen reflejar la poca valoración que las actividades extra clase estos tienen, al no haberlo experimentado previamente. Esto porque la consulta de los recursos fue nula por una cantidad considerable de estudiantes, quienes no accedieron del todo a la plataforma durante el desarrollo del curso. Al ser la utilización de ésta opcional para la evaluación final, es decir, su utilización no está contenida en el programa oficial del curso y no tiene elementos de evaluación que incidan en la nota que obtendrán puede ser otro de los factores que influyeron en el poco uso que se le dio.

Sin embargo, el trabajo realizado en la producción de material, tanto para las presentaciones de clase como para la plataforma, es tiempo invertido para generar un cambio que puede ser gradual, al incorporar a otros docentes que propongan y produzcan, guiados en parte y motivados por el trabajo realizado, la experiencia previa documentada, y el potencial de la estrategia y material realizado. En cuanto a éste, el tiempo de producción ha sido considerable, con relación al tiempo en que se presenta o puede ser aprovechado por los estudiantes, hecho que debe tomarse en cuenta para futuros desarrollos.

Para la incorporación de actividades relacionadas con la solución de problemas o situaciones reales, que tengan como fundamento los conocimientos del curso de cálculo, se propone la capacitación a los docentes, la generación de problemas de interés en colaboración con los especialistas de las diferentes áreas, y el establecimiento de estas actividades como parte del programa y evaluación oficial del curso.

### **4.3 Instrumentos de evaluación**

En la experiencia realizada, los elementos que contribuyeron en mayor medida al aprendizaje de los estudiantes fueron las animaciones de clase y las presentaciones realizadas, así como las evaluaciones de seguimiento, en las cuales fue reiterativa la evaluación de conocimiento, acompañadas de la solución y comentarios por parte del profesor.

Estas evaluaciones han incidido en los niveles de comprensión que se definieron para la estrategia, pero no han mostrado un impacto contundente en la mejora de los resultados obtenidos en las evaluaciones tradicionales y oficiales del curso. Esto se puede explicar a que el tipo de preguntas de los exámenes de cátedra se pueden responder sin comprender perfectamente el concepto, pues se evalúa más un aprendizaje memorístico.

Las estrategias de motivación que se implementaron al inicio de las clases en las que se incorporó la tecnología como recurso para el aprendizaje influyeron positivamente, pues los estudiantes mostraron interés en ellas. Es posible que el enriquecimiento de las situaciones y problemas generadores en la motivación tenga un impacto aún mayor si se amplía su presentación a otras áreas, que pueden generar el interés de los estudiantes inscritos en las diferentes carreras.

## **5. Análisis y discusión**

En esta sección se va a exponer las principales conclusiones que se llegó al finalizar este proceso de investigación. Se enfocará en dos puntos principalmente, en comentarios sobre la implementación en las aulas y apreciaciones personales sobre trabajos de esta índole.

Con lo realizado en este estudio no es posible realizar generalizaciones o inferencias sobre los aportes de la propuesta por dos importantes razones:

1. La cantidad de estudiantes utilizados en el estudio. A pesar de que se aplicaron las evaluaciones a todos los estudiantes participantes en las clases, los análisis de resultados se hicieron con base en siete estudiantes solamente, puesto que no todos habían realizado las tres evaluaciones.

2. No se implementaron todos los elementos de la propuesta. Por lo tanto se espera que una implementación completa de la estrategia arroje resultados aún más alentadores en cuanto al desarrollo de la competencia definida, para lo cual es necesario incorporar sus elementos en la evaluación oficial de la cátedra e ir mejorando la cultura de los estudiantes en cuanto a uso de TIC como apoyo al aprendizaje.

Sin embargo, los resultados son alentadores en cuanto al impacto en la incorporación de TIC como herramienta de desarrollo de competencias, y en el aporte de elementos de este modelo en un curso universitario de cálculo. Estos pueden extenderse para incorporar el resto de contenidos del curso, e incluso otros cursos superiores de matemática.

Por otra parte, es importante disponer de equipo tecnológico en el aula para el mejor desarrollo de la clase y además la interacción con las actividades de GeoGebra por parte de los estudiantes durante o fuera de la clase. Además, la consulta y acceso a los recursos de la plataforma Moodle no tuvo el resultado esperado, pues no fue aprovechado por la mayoría de los estudiantes. Esto puede explicarse debido a que el acceso, consulta y uso de la plataforma fue opcional, y no afectaba la evaluación oficial del curso, lo que pone en evidencia la cultura de algunos estudiantes en cuanto al uso de TIC y profundización en los temas de estudio.

El diseño de propuestas didácticas en donde se usen las TICs debe principalmente orientar al estudiante a una comprensión de los conceptos de manera distinta a la que pueda enfrentarse en una clase tradicional, sin uso de TICs. Para lograr esto, el profesor debe capacitarse en el uso de software educativo, lenguajes de programación que le permitan diseñar applets visualmente mejores así como las ilustraciones tengan mayor sentido matemático, herramientas disponibles en plataforma educativas, etc.

A pesar de que existe una gran cantidad de artículos sobre el uso de la tecnología en las aulas de matemática, es necesario crear la cultura en los estudiantes y profesores en que para estudiar cierto contenido también debe usar los otros recursos que se dispongan y no solo la solución rutinaria de ejercicios. Para esto, un paso indispensable es tener propuestas didácticas validadas y completas para implementarlas en todo el curso.

Los principales beneficios obtenidos fueron la creación del material, el cual sirve no solamente para su aplicación directa en nuevas experiencias, sino como parámetro para estimación, respuesta de los alumnos y motivación a futuras experiencias. Las principales dificultades provinieron del manejo del equipo, y de la ausencia de un elemento de evaluación que permitiera incorporar los elementos de proyectos, del uso de la plataforma Moodle y de los exámenes cortos.

Estos aspectos deben tenerse en cuenta para mejorar la experiencia en futuras aplicaciones. Como la respuesta de los estudiantes ha sido favorable, y de parte de los docentes y las evaluaciones realizadas mostraron incidencia positiva en los niveles de comprensión, se sugiere seguir con la producción de material, la capacitación a docentes, la incorporación del resto de temas de éste y otros cursos, y el mejoramiento de las condiciones de las aulas y el equipo para facilitar la utilización del material y recursos. La incorporación de más participantes, como asistentes de clase y especialistas en producción de material audiovisual puede mejorar el impacto obtenido con la experiencia.

Por tal razón, en el futuro se espera continuar con el desarrollo de la estrategia y nuevas competencias en cálculo diferencial e integral y sus conocimientos base, con la incorporación de recursos TIC que estén a la vanguardia de las tecnologías disponibles. Esto con la finalidad de tener un mayor impacto en la formación de estudiantes, sus competencias profesionales y habilidades para la investigación.

## 6. Agradecimientos

En el desarrollo de esta investigación, varias personas que colaboraron en los trámites administrativos y académicos. Una ayuda muy importante fue la de la M.Sc. Gabriela Murillo, quien de manera amable y desinteresada nos ayudó en la revisión de cada etapa del proyecto. Quedamos muy agradecidos con ella por sus aportes y sugerencias, siempre fueron acertados e importantes para la investigación.

## 7. Referencias informativas

1. Aquere, S. (s.f) “Una propuesta didáctica para la enseñanza del límite”, Revista Premisa, Argentina. 40: 14–24.
2. Artigue, M. (1995) “La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos”, en: P. Gómez (Ed.) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamérica, México: 7–23.
3. Camacho, M. & González, M. (2005). “Sobre la comprensión de estudiantes de matemática del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores”. Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y experiencias didácticas, Barcelona 23 (1):81-96.
4. Cano, E. (2008) “La evaluación por competencias en la educación superior”, Revista de Curriculum y formación del profesorado
5. Hernandez, G.; Da Silva, S. (2008) “La representación gráfica de la recta tangente con respecto a una función para un punto específico utilizando el software Winplot”, Electronic Proceedings of the Eleventh International Congress on Mathematical Education México.
6. Hitt, F. (2003) “Dificultades en el aprendizaje del Cálculo”, Memoria del décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.
7. Tobón, S. (2005) Formación Basada en Competencias. Pensamiento complejo, Diseño Curricular y Didáctica, Segunda Edición. ECOE Ediciones, Bogotá.