

# Proyecto de innovación pedagógica en el aula para orientar el aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso de álgebra lineal a través del desarrollo del modelo cinemático directo para el robot KR120-2P®

Jorge Villamizar Morales

Universidad Industrial de Santander



Proyecto cofinanciado por la Unión Europea



Proyecto coordinado por la Universidad Veracruzana, México

2011

---



Proyecto cofinanciado  
por la Unión Europea



Universidad Veracruzana

Proyecto coordinado  
por la Universidad Veracruzana,  
México

«La presente publicación ha sido elaborada con la asistencia de la Unión Europea. El contenido de la misma es responsabilidad exclusiva de los autores y en ningún caso refleja los puntos de vista de la Unión Europea».



Esta obra está bajo la licencia de Reconocimiento-No comercial – Sin trabajos derivados 2.5 de Creative Commons. Puede copiarla, distribuirla y comunicarla públicamente, siempre que indique su autor y la cita bibliográfica; no la utilice para fines comerciales; y no haga con ella obra derivada.

# Proyecto de innovación pedagógica en el aula para orientar el aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso de álgebra lineal a través del desarrollo del modelo cinemático directo para el robot KR120-2P®

M.SC. Jorge Villamizar Morales

## Resumen

*En este trabajo por proyectos o aprendizaje por proyectos en el aula, se aplican estrategias pedagógicas que buscan optimizar el aprendizaje del álgebra lineal con el fin de mejorar el desempeño de los estudiantes en proceso de formación profesional. En este trabajo se desarrolla un modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® partiendo de la geometría de las transformaciones lineales y usando las matrices homogéneas como representaciones de transformaciones lineales en un ambiente MatLab 7.0 ®. Este ejercicio permite a los estudiantes encontrar la relación directa entre las matemáticas y la robótica, entre los conceptos y la realidad en que ellos son empleados, además de utilizar integralmente los conocimientos previos. Esta experiencia se enmarca, para la mayoría de los participantes en el curso, en un Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).*

**Palabras clave:** Transformaciones lineales, robótica, cinemática directa y aprendizaje basado en problemas (ABP).

## Contexto de la intervención

Nombre de la asignatura: Álgebra lineal II

Código de la asignatura: 23272

Unidad Académica responsable del curso: Escuela de Matemáticas

Nivel: Segundo semestre

Número de créditos: 4

Programas oferentes: Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electrónica, Física, Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas.

Tiempo de Acompañamiento Directo (TA): 4 horas semanales

Tiempo de Estudio Independiente (TI): 8 horas semanales

Número de semanas por semestre: 16 semanas equivalentes a 64 horas TA.

Número de estudiantes: 43

Período de intervención: segundo semestre académico de 2010.

## Descripción de la intervención

A raíz de los altos niveles de desaprobación registrados históricamente en los cursos de álgebra lineal, impartidos durante el segundo nivel de estudios de pregrado, nace la preocupación por desarrollar estrategias pedagógicas que optimicen el aprendizaje en esta área que, por su parte, es de gran importancia para la formación de los profesionales de la ingeniería, las matemáticas, la física y la licenciatura en matemáticas.

El interés por formar profesionales con sólidas competencias comunicativas, disciplinares, interpersonales, investigativas y tecnológicas, sumado a la realidad antes descrita, motiva la incorporación del trabajo por problemas en las dinámicas de aula, ello con el propósito de orientar el aprendizaje de las transformaciones lineales mediante el desarrollo del modelo cinemático directo de un robot de la casa matriz alemana Kuka-Robotics.

Esta experiencia se lleva a cabo durante las ocho semanas finales del semestre académico. Algunas de las consecuencias de este trabajo son: a) el estudiante se convierte en constructor de su aprendizaje, b) hace uso de las tecnologías (MatLab®, Moodle®), c) busca y maneja información especializada, d) trabaja en equipo, e) diseña y sustenta de forma oral su trabajo, etc. En esta situación, el profesor asume el rol de mediador.

Los estudiantes toman el curso en su segundo semestre, previa aprobación del curso de álgebra lineal básica. El curso ha sido impartido históricamente de manera tradicional, esto es, tiza y tablero, sin uso de tecnologías, desconocimiento total de MatLab 7.0® y evaluado a partir de cuatro exámenes conceptuales escritos individuales. A partir de estas condiciones históricas, la innovación en el aula se inicia con una charla magistral ofrecida por un profesor invitado experto en robótica, la cual aparte de mostrarles algunas áreas de desempeño de los robots, busca motivarlos a resolver el problema que se les planteará. Seguidamente se conforman grupos de tres estudiantes, se selecciona aleatoriamente de la página en Internet uno de los robots industriales ofrecidos por Kuka-Robotics para cada grupo definido y finalmente se da a conocer el problema, de lo cual quedará constancia en el curso anidado en la plataforma Moodle, como se muestra a continuación.

**PROYECTO DE AULA**

**ASIGNATURA: ÁLGEBRA LINEAL II**

**PROFESOR: JORGE VILLAMIZAR MORALES**

**GRUPO: H1**

**SEMESTRE: II/2010**

**FECHA DE ENTREGA: 3 de diciembre de 2010 en el horario usual de la clase y en la sala #6.**

**PUNTO I**

Diseñe o dibuje el robot asignado previamente y del cual encontrará todos los detalles técnicos en la página: [www.kuka-robotics.com](http://www.kuka-robotics.com)

**PUNTO II**

Desarrolle un modelo cinemático directo correspondiente al robot dibujado en el punto I.

**PUNTO III**

Escriba el código o programa en Matlab que valide el modelo cinemático directo para el robot en desarrollo en los puntos I y II.

**PUNTO IV**

Elabore un poster de acuerdo al sugerido y visible en Moodle con los resultados obtenidos en los puntos anteriores. Dicho poster será presentado por cada uno de los grupos con los demás puntos establecidos.

*Descripción del problema en Moodle*

En el caso específico que se está mostrando, para enfrentar la resolución del problema, los estudiantes deben investigar, planificar, ejecutar y evaluar el desarrollo de un modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P®, para lo cual deben utilizar la geometría de las transformaciones lineales, las matrices homogéneas como representaciones de transformaciones lineales y MatLab 7.0® como herramienta computacional de validación, además de conocimientos previos básicos. La presentación y sustentación de la solución del problema lo hacen al finalizar el semestre académico, ante los compañeros de curso, utilizando sólo los medios electrónicos y elaborando un poster del trabajo realizado. Este ejercicio busca que los estudiantes encuentren la relación directa entre las matemáticas y la robótica, entre los conceptos y la realidad en que ellos son empleados, además de utilizar integradamente los conocimientos previos. Por estas razones, esta experiencia se enmarca, para la mayoría de los participantes del curso, en un aprendizaje significativo.

Este trabajo por problemas o aprendizaje por problemas en el aula, tiene como propósito también, integrar diversas áreas del conocimiento para el estudio del álgebra lineal, teniendo como norte las tendencias mundiales de desarrollo tecnológico e industrial alrededor de un tema de gran interés para los estudiantes: la robótica.

Teniendo en cuenta el anterior marco teórico, a continuación se muestra el desarrollo del proyecto desde el saber específico y corresponde al camino que recorren los estudiantes hasta culminar con la defensa del mismo en la semana diecisiete del semestre.

## Representación matricial del movimiento en el espacio

Las transformaciones lineales pueden asumirse como mapeos de particular importancia en el estudio del álgebra lineal y sus aplicaciones. Dichas transformaciones se realizan entre espacios vectoriales que conservan la suma y la multiplicación vectorial por un escalar. Cualquier transformación lineal  $T$  entre espacios vectoriales de dimensión finita admite una representación matricial  $A_T$ . En caso de ser  $A_T$  invertible, entonces  $T$  puede ser escrita como una sucesión o composición de una o más transformaciones especiales, conocidas como expansiones, compresiones, reflexiones, rotaciones y cortes.

### Matriz de transformación homogénea

Para la representación de la posición o la orientación de un sólido en el espacio existen diversos métodos, tales como: matrices de rotación, vectores, cuaternios, RPY (Roll, Pitch and Yaw), ángulos de Euler y matrices de transformación homogéneas, entre otros. El método empleado para desarrollar el modelo cinemático directo en este trabajo es este último, el cual se define a continuación.

### Matrices Homogéneas

Una matriz de transformación homogénea se define como un arreglo rectangular de dimensión  $4 \times 4$ , el cual representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro. Estas matrices permiten representar la posición y la orientación de un sólido en el espacio al mismo tiempo a través de rotaciones, traslaciones, escalas y perspectivas. En general, dichas matrices son representaciones de transformaciones lineales. Ver figura 1.

$$A = \begin{bmatrix} [R(3 \times 3)] & [T(3 \times 1)] \\ [P(1 \times 3)] & [E(1 \times 1)] \end{bmatrix}$$

Figura 1: Composición de la matriz homogénea

$R(3 \times 3)$  Corresponde a una matriz de tres filas por tres columnas y representa una rotación.

$T(3 \times 1)$  Corresponde a un vector de tres filas por una columna y representa una traslación.

$P(1 \times 3)$  Corresponde a un vector de una fila por tres columnas que representa la perspectiva.

$E(1 \times 1)$  Corresponde a un escalar que representa la escala de la transformación. Para el presente caso  $P = [0, 0, 0]$  y  $E = 1$

## Matrices Homogéneas Principales

Un movimiento en el espacio se representa por una serie de rotaciones y traslaciones. Dichas rotaciones y traslaciones, se pueden representar como una multiplicación de matrices homogéneas y los arreglos matriciales concordantes pueden verse en las figuras 2 y 3.

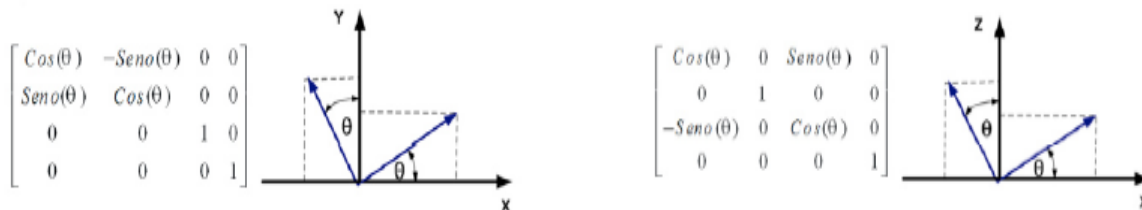


Figura 2: Matrices homogéneas de rotación en el eje Z y en el eje Y respectivamente

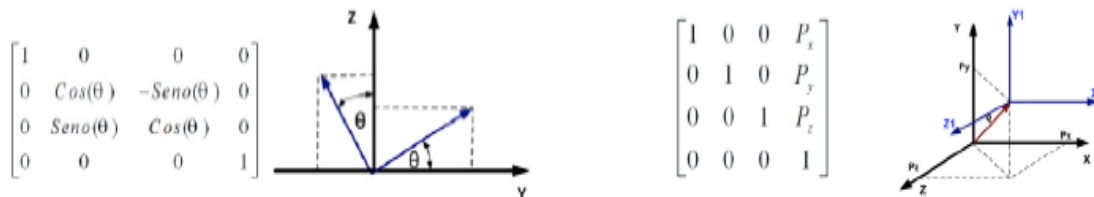


Figura 3: Matrices homogéneas de rotación en el eje X y traslación  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  respectivamente

## Cinemática Directa

La cinemática del robot se encarga del estudio del movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia sin tener en cuenta las fuerzas que actúan. Dicho de otra manera, la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares.

La cinemática directa corresponde al modelo que describe el movimiento del robot, en este modelo se conocen los grados de libertad del robot y se desea encontrar la posición final del robot. Para encontrar el modelo cinemático directo se utiliza el método de matrices homogéneas, el cual consiste en realizar los movimientos necesarios desde la base fija hasta el extremo del robot, para cada movimiento se obtienen las matrices homogéneas y el resultado final es el producto de las matrices.

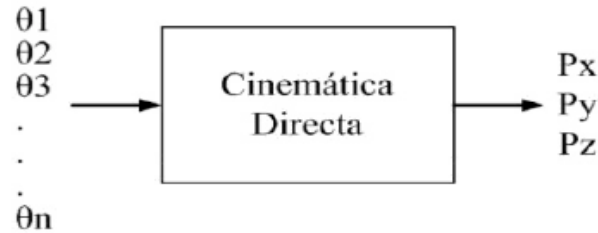


Figura 4: Diagrama de grados de libertad y posición y orientación del extremo del robot.

### Modelo matemático para la cinemática directa

Los movimientos generados para ir de un sistema de referencia a otro, representados matemáticamente por matrices de transformación, se realizan de forma tal que muestren la geometría particular del robot. El modelo cinemático completo y construido por los estudiantes es presentado en la siguiente ecuación, a sabiendas que  $A_T$  es la representación matricial resultante de las transformaciones lineales involucradas:

$$A_T = R1_Z * T1_X * T2_X * R2_X * R3_Z * R4_Z * T3_X * R5_Z * R6_Z * T4_X * R7_X * T5_X * R8_Z * T6_X * R9_X * T7_Y$$

### Modelo computacional

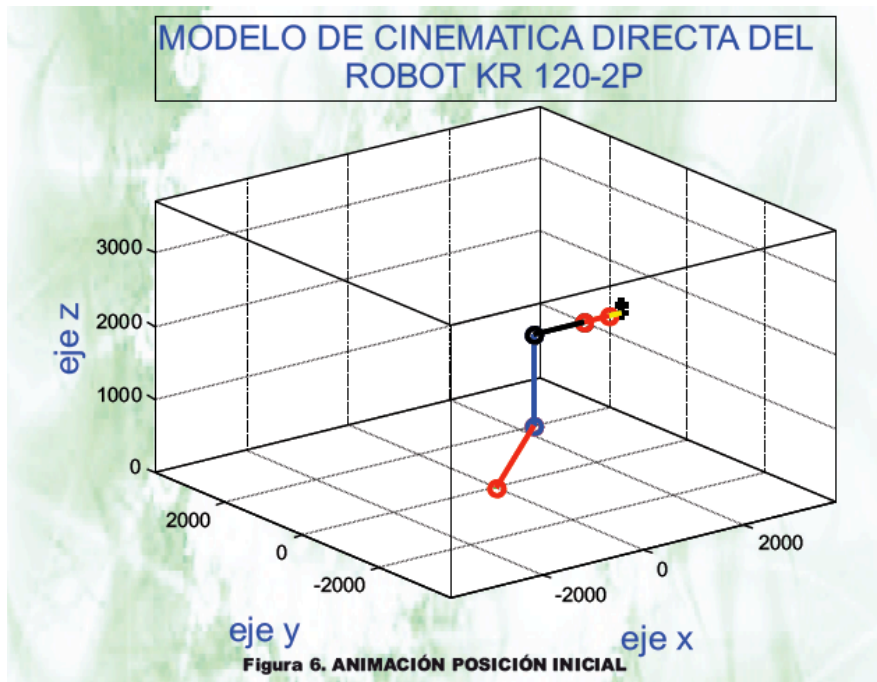
Para la validación del modelo cinemático directo se empleó MatLab 7.0 ®. En este modelo se dan como datos de entrada las posiciones angulares y se espera encontrar la posición y orientación del extremo del robot.

A continuación se muestra una imagen del robot real de la casa alemana Kuka-Robotics KR120-2P, seguido del mismo diseñado por los estudiantes en ambiente MatLab 7.0 ®. Luego se encuentra la imagen correspondiente a los sistemas de coordenadas definidos y los grados de libertad asociados al Robot KUKA KR120-2P concordantes con su ficha técnica. Finalmente, se encuentra la posición paso a paso obtenida en MatLab 7.0 ®, luego de haber introducido por pantalla los seis grados de libertad de forma aleatoria, dentro de los límites establecidos. El robot en MatLab para declararse exitoso y solucionar el problema planteado, deberá realizar los movimientos de acuerdo a la información dada por pantalla. La programación en MatLab también hace parte de las tareas por realizar por cada grupo de estudiantes. Puede afirmarse que el 100% de los estudiantes del curso desconocen MatLab.





Figura 5: Robot KUKA KR120-2P



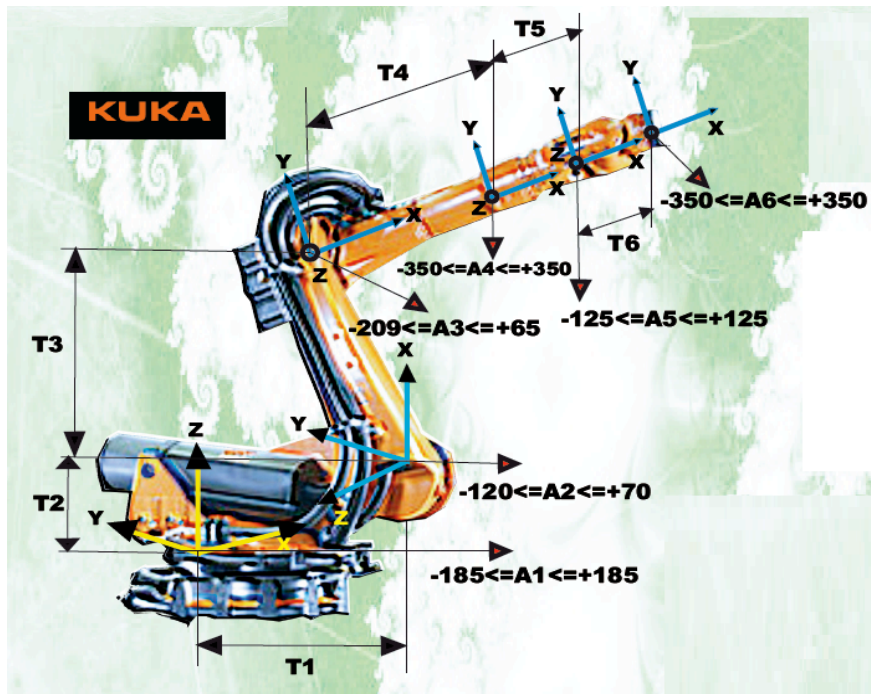


Figura 7: Sistema de coordenadas y grados de libertad asociados al Robot KUKA KR120-2P

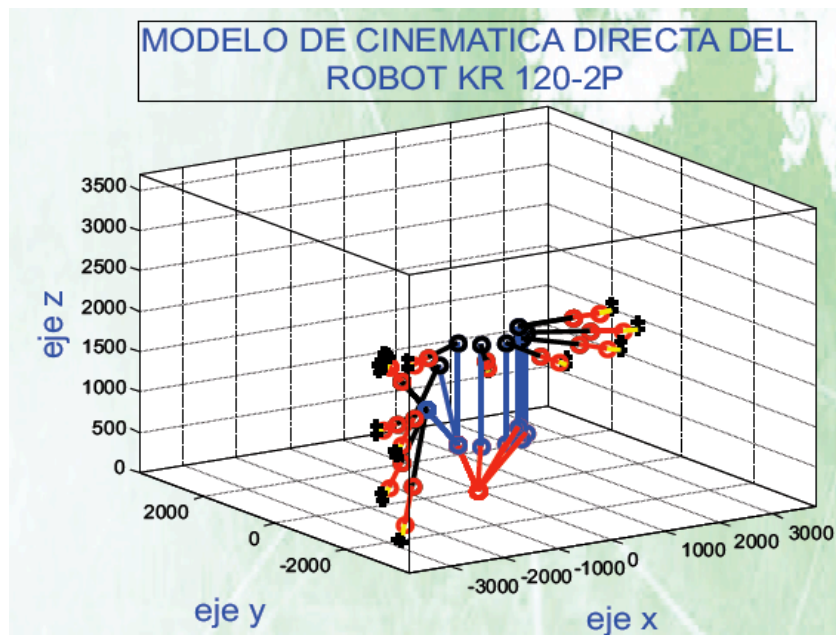
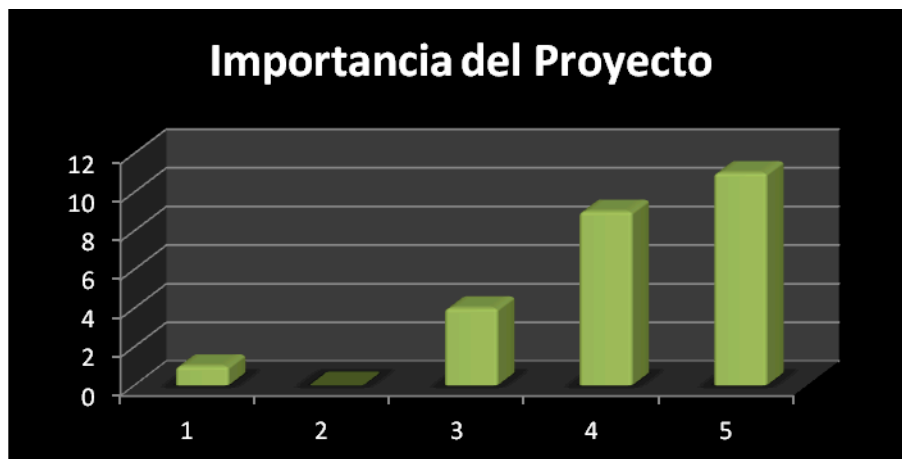


Figura 8: Posición final paso a paso del Robot KUKA KR120-2P en MatLab 7.0 ®

## Conclusiones

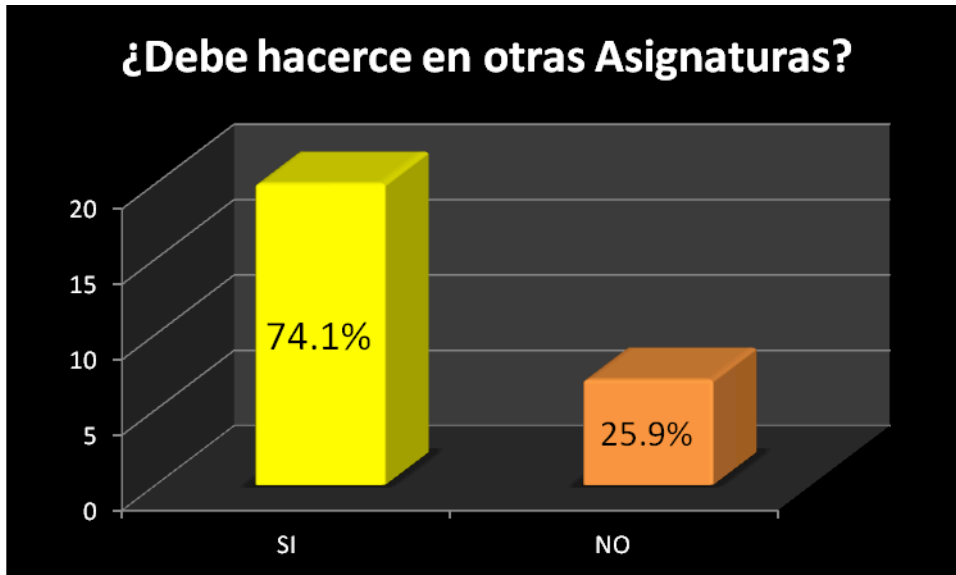
- La innovación pedagógica en el aula para orientar el aprendizaje de las transformaciones lineales a través del desarrollo del modelo cinemático directo para el robot KUKA KR120-2P, despertó un gran interés y participación activa de los estudiantes, puesto que pudieron experimentar la relación directa entre el álgebra lineal y la robótica, entre los conceptos impartidos en el salón de clases y una realidad en que ellos son empleados.
- De los 43 estudiantes que iniciaron el curso, 14 de ellos cancelaron la asignatura durante el semestre. Los 29 que finalizaron presentaron el proyecto y 15 de ellos aprobaron la asignatura, los cuales corresponden al 52%. Los 15 aprobados con respecto a los 43 iniciales corresponden al 35%, lo cual es una cifra mayor a 25%-30% en los que ubican los niveles de desaprobación normalmente.
- El proyecto realizado en el aula fue evaluado por los estudiantes luego de realizado y de la obtención de la nota final del curso. Para tal efecto se realizó una encuesta con 16 preguntas, de las cuales a continuación se muestran dos con sus respuestas correspondientes:
- 
- a) *Evalué el grado de importancia del proyecto final de la asignatura en su proceso de aprendizaje.*

1 es igual a "no es importante" y 5 es "muy importante".	
1	1
2	0
3	4
4	9
5	11



- b) *¿Considera que el proyecto final debe implementarse en otras asignaturas?*

SI	20
NO	7



Los anteriores resultados muestran lo observado a través del desarrollo del trabajo y el entusiasmo y dedicación a la hora de exponerlo.

- El papel del profesor fue como mediador y orientador de la experiencia de aprendizaje. El profesor no constituye la fuente principal de acceso a la información. Corresponde al docente ser un facilitador del proceso, es decir, ser un permanente motivador de la participación de los estudiantes, con el propósito de mantener su interés, estimular la lectura y búsqueda de la información, el aporte permanente de ideas, la planeación de las actividades, la interacción y el trato respetuoso con los compañeros de grupo.
- El proceso de evaluación de la estrategia de innovación se realizó teniendo en cuenta el impacto de la misma en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y la validación de la innovación para mejorar el proceso de enseñanza.
- En cuanto a la evaluación para el aprendizaje se tuvo en cuenta el aprendizaje y aplicación de los conceptos básicos de la asignatura, el desarrollo de la capacidad de análisis y de pensamiento complejo, la elaboración de informes de avance del proyecto de aula, el diseño, ejecución y presentación de un proyecto de aula con perfil investigativo y el trabajo en equipo.
- En cuanto a la evaluación para la innovación se consideró la eficacia de la innovación propuesta para el desarrollo de una formación basada por competencias, el impacto en los estudiantes para su aprendizaje, de las innovaciones incluidas en la asignatura y los resultados de aprobación obtenidos producto de las innovaciones propuestas.
- La propuesta de innovación en las asignaturas incluyó un cambio en el sistema de evaluación buscando una valoración más incluyente. Este se vio reflejado en un peso del 8% sobre la nota final, rompiendo el esquema tradicional del promedio de cuatro exámenes con un mismo peso.
- Como introducción a la fundamentación de la robótica cabe destacar que la cinemática directa es el principio de conocimiento del comportamiento espacial de los manipuladores modernos, y establece fuertes bases conceptuales que le permitirá a los alumnos abordar métodos más complejos.
- El uso de la herramienta computacional Matlab ® es una herencia del curso y un gran soporte a la labor investigativa que desarrollarán los futuros profesionales.

- La solución del problema planteado permitió a los estudiantes conocer más profundamente el funcionamiento de los brazos robóticos, de esta manera se presentaron refuerzos en los conocimientos en aspectos de ubicación espacial, tales como ortogonalidad, reorientación de ejes de simetría, traslaciones y rotaciones con respecto a ejes de posición variable.
- El proyecto de aula desarrollado contribuye de manera significativa en la formación de profesionales con sólidas *competencias teóricas* (saberes), teorías, conceptos y principios adquiridos por el estudiante para solucionar el problema propuesto de manera óptima; *competencias prácticas* (saber hacer), habilidades, destrezas, procedimientos y acciones que ponen en práctica el conocimiento; y *competencias transversales* (saber ser), entendidas como las competencias genéricas relacionadas con la puesta en práctica integrada de aptitudes, rasgos de personalidad y conocimientos. Estas últimas competencias admiten dividirlos en *competencias personales* (saber ser), *competencias participativas* (saber estar) y *competencias instrumentales* (saber aprender), las cuales se hacen presente a lo largo del desarrollo del proyecto de aula. La evidencia de las mismas se realiza a través de los informes de avance que periódicamente debe ir presentando cada grupo y en la sustentación final ante el curso en pleno.
- El proyecto de aula ejecutado se enmarca en un Aprendizaje Basado en Problemas, puesto que se asume un modelo de aprendizaje activo en el que los estudiantes planean, implementan, evalúan y desarrollan un proyecto que tiene aplicación real y que va más allá del aula de clase. Además de los beneficios anteriormente expuestos, algunos autores reconocen entre otros los siguientes:
  - a) Integración entre el aprendizaje en el aula y la realidad. (Blank, 1997; Bottoms & Webb, 1998; Reyes, 1998) y
  - b) Desarrollo de habilidades de colaboración para construir conocimiento. (Bryson, 1994; Reyes, 1998)

Puede afirmarse que la solución del problema planteado representa una estrategia eficaz y flexible, la cual a partir de lo desarrollado por los estudiantes, puede mejorar significativamente la calidad de su aprendizaje.

Finalmente, el ABP como metodología para resolver el problema propuesto, favorece el desarrollo de habilidades en cuanto a la búsqueda y manejo de la información y además pretende desarrollar habilidades de investigación en el aula, puesto que los estudiantes tendrán que, a partir de la presentación del problema, indagar y comprender qué es lo que pasa y lograr una solución óptima.

## Bibliografía

- Barrientos, A., Peñín, L.F., Balaguer, C., Aracil, R. Fundamentos de Robótica. Ed. McGraw-Hill, 2007.
- Archila, J., Dutra, M, M.: "Study and modeling of KR 6 KUKA robot", Revista Facultad de Ingenierías. Universidad de Antioquia N° 46 pp. 132-144. Diciembre de 2008.
- Grossman I. Stanley., Álgebra lineal. Quinta edición. McGraw-Hill, 1996.
- Corredor M. Martha V., Arbeláez L. Ruby, Pérez A. Martha I.: "Estrategias de enseñanza y aprendizaje". Primera edición. 2009.
- Pinilla Vásquez Raquel., "Antología de proyectos pedagógicos". Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2001. Bogotá, Colombia.
- Nakos George., Joyner David., "Álgebra lineal con aplicaciones". International Thomson Editores. 1999.
- Poole David., "Álgebra lineal: Una introducción moderna". Segunda edición. Cengage Learning. 2007.
- Blank, W. (1997). Authentic instruction. In W.E. Blank & S. Harwell (Eds.), Promising practices for connecting high school to the real world (pp. 15–21). Tampa, FL: University of South Florida. (ERIC Document Reproduction Service No. ED407586)
- Reyes, R. (1998). Native perspective on the school reform movement: A hot topics paper. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory, Comprehensive Center Region X. Retrieved July 10, 2002, from <http://www.nwrac.org/pub/hot/native.html>
- Bottoms, G., & Webb, L.D. (1998). Connecting the curriculum to "real life." Breaking Ranks: Making it happen. Reston, VA: National Association of Secondary School Principals. (ERIC Document Reproduction Service No. ED434413)
- Bryson, E. (1994). Will a project approach to learning provide children opportunities to do purposeful reading and writing, as well as provide opportunities for authentic learning in other curriculum areas? Unpublished manuscript. (ERIC Document Reproduction Service No. ED392513)